ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ-ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2015

1. i) Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

με $a_1b_2 \neq a_2b_1$. Να βρεθούν κατάλληλες σταθερές x_0, y_0 ούτως ώστε η αντικατάσταση $x = X + x_0, y = Y + y_0$ να μετασχηματίζει την διαφορική εξίσωση σε μια ομογενή διαφορική εξίσωση.

ii) Να επιλυθεί η εξίσωση

$$(x - y + 3)dx + (x + 2y - 3)dy = 0. \quad (E)$$

iii) Να εξετασθεί αν υπάρχει λύση y_0 της (E) με $y_0(1) = 2$. Να εξετασθεί αν υπάρχουν μη φραγμένες λύσεις της εξίσωσης (E).

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Άσκηση $A2$, σελ. 2, Φυλλαδίου

2. Ας είναι (Ε) μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πέμπτης τάξης με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές. Υποθέτουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (Ε) έχει μια διπλή μιγαδική ρίζα $\lambda = a + bi$ με $ab \neq 0$ και μια απλή ρίζα k.

i) Αν όλες οι λύσεις της εξίσωσης καθώς και οι παράγωγοι πρώτης τάξης αυτών είναι φραγμένες επί του διαστήματος $[0, \infty)$ τότε να αποδειχθεί ότι $Re\lambda < 0$ και $k \leq 0$. Ισχύει το αντίστροφο·

ii) Αν όλες οι λύσεις της εξίσωσης καθώς και οι παράγωγοι πρώτης τάξης αυτών τείνουν προς το μηδέν για $x \to +\infty$ τότε να αποδειχθεί ότι $Re\lambda < 0$ και $k < 0$. Ισχύει το αντίστροφο·

iii) Αν $Re\lambda < 0$ και $k < 0$, να εξεταστεί αν υπάρχει λύση της εξίσωσης της οποίας η τρίτη παράγωγος δεν είναι φραγμένη.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρείστε ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων

3. Με χρήση της αντικατάστασης $x = logt$, να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t(1 - 2logt)\frac{dy}{dt} + 2py = 0, \quad t > 0,$$

όπου p είναι μια πραγματική σταθερά. Ως εφαρμογή, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t(1 - 2logt)\frac{dy}{dt} + 8y = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Η αντικατάσταση οδηγεί σε εξίσωση που επιλύεται με δυναμοσειρά γύρω από ομαλό σημείο (Hermite) .

4. Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση $y''(x) + b(x)y(x) = 0$ όπου $b : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα I. Ας είναι y_0 μια μη μηδενική λύση της εξίσωσης.

i) Αν $k \in I$ είναι μια ρίζα της y_0 να αποδειχθεί ότι $y_0'(k) \neq 0$.

ii) Να διατυπωθούν (στη γενικότητά τους) οι Προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν για την απόδειξη του (i).

iii) Να αποδειχθεί ότι ρίζες της y_0 είναι μεμονωμένες.

5. Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + 4^{-1}x^{-2}y = f(x)cosx, \quad x > x_0,$$

όπου f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $(x_0, +\infty)$ με $x_0 \geq 0$. Να εξετασθεί αν η εξίσωση

$$y'' + 4^{-1}x^{-2}y = (\sqrt{x}logx)^{-1}cosx, \quad x > 1$$

έχει ταλαντούμενες (ή μη) λύσεις.
ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Άσκηση B25, σελ. 36-37 Φυλλ. Ασκήσεων

6. i) Να βρεθεί η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης $z_x - z_y = 1, x, y \in \mathbb{R}$ που πληροί την συνθήκη $z(x,0) = sinx$.

ii) Να λυθεί το μη ομογενές γραμμικό διαφορικό σύστημα

$$y_1' = 4y_1 + 5y_2 + x^2 + 3x + 1, \quad y_2' = -2y_1 - 2y_2.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Άμεσες εφαρμογές της θεωρίας